RÉSULTANT

Exercice 1. (Fenêtre de Viviani). La *fenêtre de Viviani* est l'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ et du cylindre d'équation $x^2 - x + y^2 = 0$.

(1) Donner les caractéristiques géométriques du cylindre d'équation $x^2 - x + y^2 = 0$.

(2) Faire des dessins avec `sage`.

(3) En procédant par élimination de variables et pour chaque plan de coordoonées, déterminer une équation vérifiée par la projection de la fenêtre de Viviani sur ce plan. Dessiner les courbes associées. Identifier la courbe obtenue lorsque c'est possible.

Exercice 2. Soit $f(x, y, z) = x^2-y^2+z-1$. À l'aide du résultant, résoudre le système $f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = 0$. Vérifier les résultat à l'aide de `solve`.
N'hésitez pas à travailler dans le corps des nombres algébriques `QQbar`.
N'oubliez pas que le problème est très symétrique.

Exercice 3. (Paramétrage du cercle unité).

(1) On se propose de retrouver la paramétrisation classique du cercle unité privé de $(-1, 0)$.

 (a) Donner une équation implicite de la droite de pente t passant par le point $(-1, 0)$.

 (b) Expliquer pourquoi (x, y) est un point du cercle unité si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que (x, y, t) soit solution du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - t(x + 1) = 0. \end{cases}$$

 (c) À l'aide du résultant, retrouver une paramétrisation rationnelle du cercle.

(2) En remarquant que l'ensemble des triplets pythagoriciens primitifs est en bijection avec les points rationnels de $\mathbb{S}^1 - \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, illustrez comment une telle paramétrisation permet de déterminer, dans $\mathbb{N}^3$, les solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Exercice 4. (Parapluie de Whitney). Déterminer une équation cartésienne satisfaite par la surface paramétrée :

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \\ z = u^2 \end{cases}$$

Tous les points qui satisfont à l'équation cartésienne proviennent-ils de la surface de départ ? Faire des dessins avec `sage`.

Exercice 5. (Intersection de courbes algébriques). Si f est un polynôme de $\mathbb{R}[X, Y]$, on note $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros.

(1) Écrire une procédure qui étant donné deux polynômes à coefficients rationnels renvoie la liste des points d'intersection des courbes $Z(f)$ et $Z(g)$. Le programme renvera la liste vide si les deux courbes ne s'intersecent pas et on supposera que les points d'intersections sont en nombre fini.
N'hésitez pas à travailler dans le corps des nombres algébriques `QQbar`.

(2) Tester ce programme avec

$$f(X, Y) = X^4 + Y^4 - 1,$$
$$g(X, Y) = X^5Y^2 - 4X^3Y^3 + X^2Y^5 - 1.$$

Vérifier que le nombre de point a l'air correct avec la fonction `implicit_plot.`

Exercice 6. On suppose donnée une courbe paramétrée de façon rationelle :

$$C = \left\{ \left(\frac{a(t)}{b(t)}, \frac{c(t)}{d(t)}, \frac{e(t)}{f(t)} \right) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

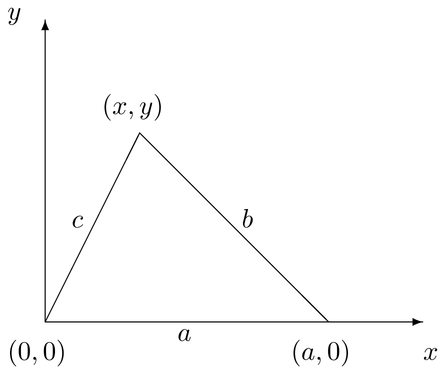
(1) Montrer que les points (x, y, z) sont sur la courbe C si et seulement si

$$b(t)x - a(t) = d(t)y - c(t) = f(t)z - e(t) = 0.$$

(2) Soit $C = \left\{ \left(\frac{t^2-1}{2}, t, \frac{t^2+1}{2} \right) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R} \right\}$. Utiliser le résultant pour trouver des équations que vérifient les points de la courbe C.

(3) Faire des dessins.

Exercice 7. On se propose de déterminer la formule donnant l'aire S d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés a, b, c. Pour ce faire on se place dans un repère orthonormé comme indiqué sur la figure suivante :



On pose $p = (a-x)^2 + y^2 - b^2$, $q = x^2 + y^2 - c^2$ et $r = ay - 2S$

(1) Montrer que $p = q = r = 0$

(2) À l'aide de calculs de résultants bien choisis, retrouver la formule de Héron :

$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Exercice 8. On se propose d'étudier dans cet exercice quelques applications du résultant dans la recherche de polynômes annulateurs de nombres algébriques.

(1) Soient a et b deux nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ de polynômes minimaux respectifs P et Q. À l'aide du résultant, construire un polynôme annulateur de $a + b$.

(2) Dans $\mathbb{C}$, soient α une racine de $X^3 + X + 1$ et ξ une racine primitive 8-ème de l'unité. Calculer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\alpha + \xi$.

(3) En utilisant la même méthode que dans la question 1, trouver un polynôme annulateur de ab (on pourra considérer le polynôme $P(ab/X)X^{deg(P)}$).

(4) À l'aide des questions précédentes, calculer des polynômes annulateurs de $\sqrt{2} \times 5^{1/4}$ et $5^{1/7} \times 3^{1/5} + 2^{1/3}$ et dire s'ils sont minimaux.

Exercice 9. Soient P et Q des polynômes de $K[X]$. Exhiber, en utilisant le résultant, un polynôme dont les racines sont les $P(\alpha)$, pour α racine de Q.

Exercice 10. On considère un robot articulé du plan, dont les bras sont des longueurs fixes donnés par les points A, B, C, D, E et M. Les points A,D et E sont immobiles, de coordonnées respectives $(-2, 0)$, $(2, 0)$ et $(-1, 4)$. Les bras sont des segments dont les longueurs sont les suivantes. $BC^2 = 1$, $CD^2 = 5$, $AB^2 = 2$, $CM^2 = 1$ et $EM^2 = 5$. Les points M, B et C sont les trois points mobiles du robot. Dessiner, à l'aide de `sage`, toutes les configurations possibles du robot.