

## (public-2013)

**Résumé :** Le tracé d'une courbe sous forme implicite  $F(X, Y) = 0$  produit souvent des artefacts qui ne correspondent pas réellement à la géométrie de la courbe. Le texte décrit une méthode qui permet, dans certains cas, de calculer une paramétrisation rationnelle de la courbe qui permet un tracé beaucoup plus conforme à la réalité.

**Mots clés :** géométrie, élimination, polynômes.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

### 1. Introduction

Le présent texte s'intéresse à la détermination d'une paramétrisation d'une courbe plane rationnelle, donnée par une équation polynomiale implicite  $F(x, y) = 0$ .

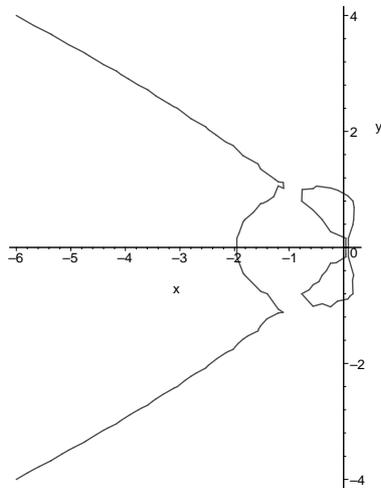
Commençons par formaliser le problème. Soit  $\mathbf{R}^2$  le plan réel de coordonnées  $x$  et  $y$ . Une courbe plane rationnelle est une courbe  $C$  de  $\mathbf{R}^2$  qui admet une paramétrisation de la forme  $[x = f(t), y = g(t)]$  hors des pôles des fractions rationnelles  $f$  et  $g$  de  $\mathbf{R}(t)$ .

L'exemple le plus simple est celui d'une droite : elle admet une paramétrisation par deux formes affines  $[x = at + b, y = ct + d]$ . On notera déjà sur cet exemple que la paramétrisation n'est pas unique. Citons aussi les cas des ellipses, des hyperboles et des paraboles. Par exemple le cercle unité admet une paramétrisation par

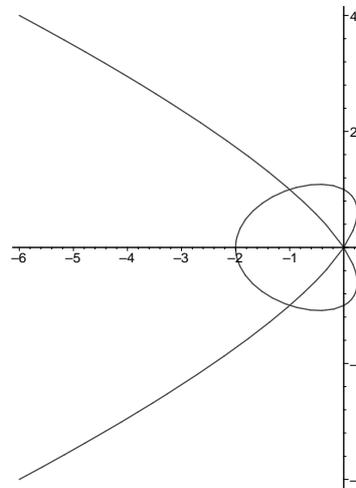
$$\left[ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2} \right].$$

Inversement, déterminer l'équation implicite – dite aussi équation cartésienne – à partir d'une paramétrisation se fait par élimination de  $t$  entre les deux équations  $f_1(t) - xf_2(t)$  et  $g_1(t) - yg_2(t)$  si  $f = f_1/f_2$  et  $g = g_1/g_2$  avec  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbf{R}[t]$ .

Le but de ce texte est d'illustrer sur un exemple (une courbe rationnelle de degré 4 particulière) comment l'on peut obtenir une paramétrisation à partir de son équation implicite. On pourra remarquer la nette amélioration de la qualité du tracé de cette courbe lorsque l'on utilise la paramétrisation de la courbe pour effectuer son traçage. Voici les résultats obtenus avec la précision par défaut en Maple pour la courbe d'équation  $y^4 + y^2(x-1) + x^2(x+2) = 0$  :



Implicite



Paramétrée

## 2. La méthode de paramétrisation dans le cas général

Revenons tout d'abord au cas du cercle unité. Dans ce cas, une des façons d'obtenir une paramétrisation consiste à choisir un point, par exemple  $P = (-1, 0)$ , puis à constater que toute droite passant par  $P$  sauf une intersecte le cercle en exactement un second point. Si  $t$  est la pente d'une telle droite  $D_t$ , les coordonnées du second point d'intersection redonnent le paramétrage cité plus haut.

Plus généralement, soit une courbe  $C$ , d'équation implicite  $F(X, Y) = 0$ , où  $F$  est un polynôme. Nous allons chercher à déterminer une famille de courbes  $C_t$  dépendant d'un paramètre  $t$ , donnée par un polynôme  $P_t(x, y) \in \mathbf{R}[t][x, y]$ , telle que  $C$  et  $C_t$  aient en commun un unique point dont les coordonnées dépendent de  $t$ . La fonction qui associe à  $t$  les coordonnées de ce point est alors rationnelle, et fournit ainsi la paramétrisation recherchée.

La construction de  $P_t$  est le point le plus difficile en général. Soit  $d$  le degré de  $C$ , c'est-à-dire le degré du polynôme  $F$ . Nous allons considérer un polynôme  $P$  de degré  $d - 2$  (lorsque  $d > 2$ ) en  $x, y$  à coefficients indéterminés. Dans notre exemple ce degré sera 2, donc le polynôme sera  $P := ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ , où  $a, \dots, f$  sont des indéterminées.

Il faut ensuite réduire le nombre d'indéterminées en imposant des conditions à  $P$  qui se traduisent en des conditions linéaires sur ces indéterminées. En d'autres termes, on considère la famille paramétrée de tous les polynômes de degré  $d - 2$ , puis on réduit le nombre de ces paramètres en imposant des conditions de dépendance linéaire aux paramètres.

Le polynôme  $P$  représente la famille de toutes les courbes de degré  $d - 2$ , il dépend de  $\frac{1}{2}d(d - 1)$  paramètres, mais il faut noter que la courbe définie par un polynôme ne dépend que de celui-ci qu'à multiplication par une constante non nulle près. Pour réduire le nombre de paramètres

on va imposer à la courbe  $\{P = 0\}$  de passer par  $\frac{1}{2}d(d-1) - 2$  points, ce qui donne autant de conditions linéaires homogènes sur les paramètres.

Dans le cas que l'on va traiter ici, le théorème suivant nous donne un choix adapté pour ces points :

**Théorème.** *Une courbe plane irréductible  $C$  de degré  $d$  ayant  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$  points singuliers est rationnelle. Si  $C$  est une telle courbe avec  $d > 2$  et  $S$  l'ensemble de ses points singuliers, pour tout ensemble  $T$  de  $d-3$  points non singuliers de  $C$ , la famille à un paramètre des courbes de degré  $d-2$  passant par les points de  $S \cup T$  fournit une paramétrisation rationnelle de  $C$ .*

Le fait que les courbes de degré  $d-2$  passant par les points de  $S \cup T$  forment une famille à un paramètre signifie que les conditions linéaires homogènes (sur les coefficients de  $P$ ) d'annulation aux différents points de  $S \cup T$  sont linéairement indépendantes : en effet  $\frac{1}{2}d(d-1) - |S \cup T| = 2$ , et une famille linéaire à deux paramètres homogènes de polynômes donne une famille à un paramètre de courbes.

Le fait que ladite famille fournisse une paramétrisation de  $C$  provient d'un théorème de Bézout qui dit, dans le contexte du théorème ci-dessus, que le nombre de points d'intersection de  $C$  et  $C_t$ , ceux de  $S$  comptant double, est au plus  $d(d-2)$  et égal à ce nombre pour tout  $t$  hors d'un ensemble fini : l'identité  $d(d-2) = 2|S| + |T| + 1$  nous indique donc l'existence d'un unique point commun à  $C$  et  $C_t$  hors de  $S \cup T$ , pour tout  $t$  hors d'un ensemble fini.

Les points de  $S$  comptent double pour la raison suivante : si une courbe plane irréductible  $C$  de degré  $d$  a  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$  points singuliers ceux-ci sont tous des points doubles, c'est-à-dire de la forme



L'exemple que l'on va étudier illustrera ce théorème dû à Bézout, ainsi que l'indépendance des conditions linéaires énoncée ci-dessus.

### 3. Étude de la paramétrisation d'une quartique rationnelle choisie.

On choisit la quartique d'équation  $F(x,y) := y^4 + y^2(x-1) + x^2(x+2) = 0$ . On pourra effectuer le tracé de  $C$  directement à l'aide d'une fonction de traçage des courbes définies implicitement. Le choix de tracer cette courbe pour  $x$  et  $y$  compris entre  $-5$  et  $5$  donne une figure lisible. Dans plusieurs logiciels, la fonction `implicitplot` permet un tel traçage.

Soient  $F'_x$  et  $F'_y$  les dérivées partielles de  $F$  suivant  $x$  et  $y$ , respectivement. L'ensemble  $S$  des points singuliers de  $C$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x,y)$  avec  $F(x,y) = F'_x(x,y) = F'_y(x,y) = 0$ . Ils correspondent aux points où  $C$  n'admet pas de tangente.

Les zéros communs à (i)  $F$  et  $F'_x$ , et (ii)  $F$  et  $F'_y$ , correspondent respectivement

(i) : aux points de  $S$  et à ceux où  $C$  admet une tangente verticale,

(ii) : aux points de  $S$  et à ceux où  $C$  admet une tangente horizontale.

En calculant les résultants en  $y$  et en  $x$  des couples  $(F, F'_x)$  et  $(F, F'_y)$  on obtient les coordonnées en  $x$  et en  $y$  des points correspondant aux cas (i) et (ii). On en déduit les coordonnées des trois points singuliers de  $C$ .

Il s'agit alors :

- (1) D'écrire le système linéaire des équations satisfaites par les coefficients d'un polynôme de degré 2 (soit  $P := ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ ) s'annulant aux points singuliers de  $C$  :  $P(0,0) = P(-1,1) = P(-1,-1) = 0$ .
- (2) De déterminer un point  $Q$  de  $C$  non singulier : c'est ici facile à trouver, car  $F$  s'annule pour plusieurs valeurs évidentes du couple  $(x,y)$ . On choisira  $Q := (-2,0)$  par la suite.
- (3) De résoudre le système linéaire obtenu en imposant à  $P$  de s'annuler aux points singuliers de  $C$  et en  $Q$ .

Les solutions du système linéaire  $P(0,0) = P(-1,1) = P(-1,-1) = P(-2,0) = 0$ , qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0$$

s'expriment ici, par exemple, en fonction de  $a$  et  $b$  :  $c = a$ ,  $d = 2a$ ,  $e = b$  et  $f = 0$ .

On obtient le polynôme  $P_{a,b}(x,y) = ax^2 + bxy + ay^2 + 2ax + by$ . Il paramétrise l'ensemble des polynômes de degré deux s'annulant aux quatre points de  $S \cup \{Q\}$ .

En posant alors  $P_t := P_{1,t} = x^2 + txy + y^2 + 2x + ty$  on obtient une famille à un paramètre de polynômes de degré 2, unitaires en  $x$ , s'annulant aux points singuliers de  $C$  et en  $Q$ . Le polynôme  $P_t$  paramétrise l'ensemble des polynômes de degré 2, unitaires et de degré 2 en  $x$ , s'annulant aux points de  $S \cup \{Q\}$ .

On factorise alors les résultants de  $F$  et  $P_t$  en  $x$  et en  $y$ , et on en déduit la paramétrisation de  $F$  par des fonctions rationnelles de  $t$  :

$$R_x := \text{Res}_x(F, P_t) = y^3(y+1)^2(y-1)^2(y+2t-t^3)$$

et

$$R_y := \text{Res}_y(F, P_t) = x^2(x+1)^4(x+2)(x-3t^2+t^4+2),$$

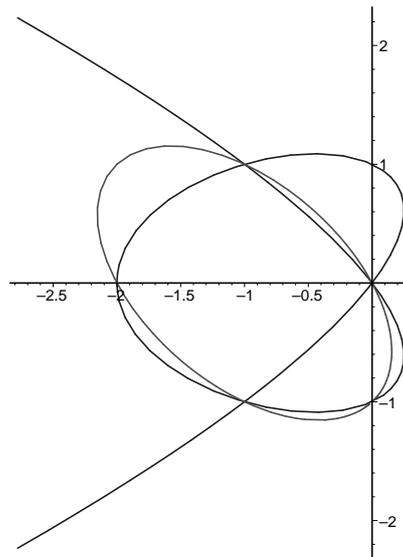
d'où la paramétrisation de  $C$  :  $x(t) = -(t^2-1)(t^2-2)$  et  $y(t) = t(t^2-2)$ .

La factorisation de ces deux résultants a l'interprétation géométrique suivante : la courbe  $C_t$ , donnée par l'équation implicite  $P_t(x,y) = 0$ , intersecte  $C$  aux trois points doubles de  $C$  (les points singuliers).

- le point  $(0,0)$  donne un facteur  $x^2$  dans  $R_y$  et  $y^2$  dans  $R_x$ ,
- le point  $(-1,1)$  donne un facteur  $(x+1)^2$  dans  $R_y$  et  $(y-1)^2$  dans  $R_x$ ,
- le point  $(-1,-1)$  donne un facteur  $(x+1)^2$  dans  $R_y$  et  $(y+1)^2$  dans  $R_x$ .

De plus, le point simple  $(-2, 0)$  donne un facteur  $(x + 2)$  dans  $R_y$  et  $y$  dans  $R_x$ . Le facteur restant, qui dépend de  $t$ , donne les coordonnées du dernier point, et fournit ainsi la paramétrisation.

Concluons en traçant, sur un même graphique  $C$  et  $C_t$  pour une valeur de  $t$  particulière. Il faut choisir une valeur  $t_0$  de  $t$  telle que  $P_{t_0}$  est irréductible (qu'est la courbe  $\{P_{t_0} = 0\}$  sinon ?). Le choix  $t_0 = 1$ , pour  $P_t$  décrit ci-dessus, convient. Il donne le résultat suivant :



## Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - Détailler un point de la construction et ses bases mathématiques.
  - Retrouver l'équation implicite à partir de la forme paramétrée, en suivant la méthode suggérée dans l'introduction (calcul d'un résultant).
  - Appliquer la méthode du texte à une des deux courbes suivantes :
    - La cubique d'équation :  $y^2 = x^3 + x^2$ .
    - Le trifolium :  $(x^2 + 3y^2)(4x^2 + 12y^2 - 27) = 4x(x^2 - 9y^2) - 27$ .
  - Démontrer qu'une conique, qui n'est ni vide ni union de deux droites, n'a pas de point singulier et est rationnelle.
  - Démontrer le théorème de Luroth : toute courbe rationnelle admet une paramétrisation qui est une bijection hors d'un nombre fini de valeurs du paramètre.

(public-2013) C : algèbre et calcul formel

- Utiliser la formule d'Euler sur l'homogénéisé  $H \in k[x, y, z]$  de  $F$  (i.e.  $nH = xH'_x + yH'_y + zH'_z$ , avec  $n := \deg F = \deg H$ ) pour montrer que les zéros communs à  $F$  et  $F'_x$  correspondent aux points de  $S$  et à ceux où  $C$  admet une tangente verticale.
- Démontrer à l'aide de propriétés du résultant le théorème suivant dû à Bézout : deux courbes de degrés  $d$  et  $d'$  sans composante commune ont au plus  $dd'$  points en commun. On pourra au besoin se limiter au cas où les courbes sont irréductibles, ou dans une autre direction traiter du cas de deux courbes du plan projectif.